9. Tutorium ↗ 8. Tutorium : Kahoot vor Weihnachten

Samstag, 1. Januar 2022 14:01

1 Kohärente Zustände (Glauber Zustände)

kohärentes Licht

- nützlich zur Beschreibung von monochromatischer Laserstrahlung
- perfekte zeitliche Kohärenz → kein Zerfließen des Wellenpakets
- keine feste Teilchenzahl
  ↳ im Gegensatz zu Fock-Zuständen $|n\rangle$: $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$
- Verteilung der Teilchenzahl folgt einer Poissonverteilung

Mathematische Definition $|\alpha\rangle$

- Eigenvektor des Vernichtungsoperators: $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$
- die Fock-Zustände bilden ein vollständiges Orthonormalsystem
  ↳ Entwicklung von $|\alpha\rangle$ nach $|n\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\alpha\rangle}_{c_n} = \sum_n c_n |n\rangle$$

- nun wenden wir die Definition an

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{a}|n\rangle \underset{\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n}|n-1\rangle \underset{\text{Indexverschiebung}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle \stackrel{!}{=} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

$\Rightarrow$ Rekursionsformel für c_n: $\quad c_{n+1} = c_n \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}$ bzw. $c_n = c_{n-1}\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$ Bestimmung von c_0 durch Normierungsbedingung $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

$$\Rightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_m^* c_n \underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{mn}} = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\right|^2 |c_0|^2 = |c_0|^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}}_{\exp(|\alpha|^2)} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c_0 = \exp\left(-\tfrac{1}{2}|\alpha|^2\right)}}$$

Damit ergibt sich für den kohärenten Zustand

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n|n\rangle = c_0 \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\underbrace{|n\rangle}_{=\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle}$$

Tutorium 7

$$\Rightarrow \boxed{|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{n!}|0\rangle}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)}{n!} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle \end{aligned}}$$

$\sqrt{n!}$

↗ siehe Definition Aufgabe 8.2

- weitere Eigenschaften:
  - kohärente Zustände sind nicht orthogonal $\langle\beta|\alpha\rangle = e^{\alpha\beta^* - \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}$
  - sie besitzen minimale Unschärfe: $\Delta\hat{p}_\alpha \Delta\hat{x}_\alpha = \frac{\hbar}{2}$

Beweis: $\Delta\hat{x}_\alpha^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$ mit $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2\rangle - \langle\hat{a}+\hat{a}^\dagger\rangle^2\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\underbrace{\langle\hat{a}^2\rangle}_{\alpha^2} + \underbrace{\langle\hat{a}^{\dagger 2}\rangle}_{\alpha^{*2}} + \underbrace{\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle}_{\langle\underbrace{[\hat{a},\hat{a}^\dagger]}_{1} + 2\underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{2\alpha\alpha^*}\rangle} - \underbrace{\langle\hat{a}+\hat{a}^\dagger\rangle^2}_{-(\alpha+\alpha^*)^2 = -\alpha^2 - \alpha^{*2} - 2\alpha\alpha^*}\Big) = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

analog $\Delta\hat{p}_\alpha^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$

$$\Rightarrow \Delta\hat{x}_\alpha^2 \Delta\hat{p}_\alpha^2 = \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow \Delta\hat{p}_\alpha\Delta\hat{x}_\alpha = \frac{\hbar}{2} \qquad \square$$

2 Schrödinger Bild vs. Heisenberg-Bild

Schrödinger Bild	Heisenberg Bild
• Zustände sind zeitabhängig $\vert\Psi(t)\rangle$	• Zustände sind zeitunabhängig $\vert\Psi\rangle_H = \vert\Psi(t_0)\rangle$
• Observablen sind zeitunabhängig sofern sie nicht explizit von der Zeit abhängen	• Observablen sind nun zeitabhängig $\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S U(t,t_0)$
• die zeitliche Entwicklung wird durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben $i\hbar\frac{d}{dt}\vert\Psi\rangle = \hat{H}(t)\vert\Psi(t)\rangle$	• die zeitliche Entwicklung wird durch die Heisenberg-Gleichung beschrieben $\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)] + \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S$
⇒ formale Lösung $\vert\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\vert\Psi(t_0)\rangle = U(t,t_0)\vert\Psi(t_0)\rangle$	↗ Herleitung: siehe Tutorium 5 (zeitliche Entwicklung des Erwartungswertes)

- Erwartungswert des Operators

$$\langle\hat{A}\rangle = {}_H\langle\Psi|\hat{A}_H(t)|\Psi\rangle_H = \underbrace{\langle\Psi(t_0)|U^\dagger(t,t_0)}_{\langle\Psi(t)|}\hat{A}\underbrace{U(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle}_{|\Psi(t)\rangle} = {}_S\langle\Psi(t)|\hat{A}_S|\Psi(t)\rangle_S$$

$$\langle A \rangle = {}_H\langle \Psi | A_H(t) | \Psi \rangle_H = \underbrace{\langle \Psi(t_0) | U^\dagger(t,t_0)}_{\langle \Psi(t)|} A \underbrace{U(t,t_0) | \Psi(t_0) \rangle}_{|\Psi(t)\rangle} = {}_S\langle \Psi(t) | A_S | \Psi(t) \rangle_S$$

→ Beide Betrachtungen sind äquivalent!